

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1: (2,0 điểm)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{3+\sqrt{x}} - \frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6} \right) : \left(1 - \frac{3\sqrt{x}-9}{x-9} \right)$
(với $x > 0; x \neq 4; x \neq 9$)

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị biểu thức P khi $x = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}} \cdot (\sqrt{3}-1)}{\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{5}}$

Câu 2: (2,0 điểm)

a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy + x + y = 3 \\ \frac{1}{x^2 + 2x} + \frac{1}{y^2 + 2y} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

b) Tìm giá trị tham số m để phương trình $x^4 - 2(2m+1)x^2 + 5m - 1 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 (với $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$) sao cho $x_4 - x_3 = x_3 - x_2 = x_2 - x_1$

Câu 3: (1,0 điểm)

Cho x và y là các số hữu tỉ thỏa mãn $x^3 - y^3 = 2xy$. Chứng minh rằng $\sqrt{1+xy}$ là một số hữu tỉ

Câu 4: (4,0 điểm)

Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ cắt nhau tại A và B (với $R > R'$). Tiếp tuyến chung CD của hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ nằm về cùng phía nửa mặt phẳng bờ OO' chứa điểm A (với $C \in (O;R)$, $D \in (O';R')$) C cắt AB tại điểm K. Qua B kẻ cát tuyến song song với CD cắt đường tròn $(O;R)$ tại E, cắt đường tròn $(O';R')$ tại F. Gọi M, N theo thứ tự là giao điểm của DA và CA với EF. Gọi I là giao điểm của EC với FD.

a) Chứng minh K là trung điểm của CD.

b) Chứng minh tứ giác ADIC nội tiếp đường tròn.

c) Chứng minh CD vuông góc với BI.

d) Chứng minh tam giác MIN cân.

Câu 5: (1,0 điểm)

Cho ba số dương a, b, c và thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 12$

Chứng minh rằng: $\frac{ab}{c+12} + \frac{bc}{a+12} + \frac{ca}{b+12} \leq 3$

HẾT

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Chữ kí của giám thị 1: Chữ kí của giám thị 2:

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1		
a)	$P = \frac{(x-9)+(4-x)+(9-x)}{(2-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})} \cdot \frac{x-9-3\sqrt{x}+9}{x-9}$	0,50đ
	$\frac{4-x}{(2-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})} \cdot \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} = \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$	0,50đ
b)	$x = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2(\sqrt{3}-1)}}{\sqrt{(1+\sqrt{5})^2-\sqrt{5}}} = \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{1+\sqrt{5}-\sqrt{5}} = 2$	0,75đ
	Nên $P = \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1$	0,25đ
Câu 2		
a)	ĐK: $x \neq 0; x \neq -2; y \neq 0; y \neq -2$ $xy + x + y = 3 \Leftrightarrow (x+1)(y+1) = 4 \Rightarrow y+1 = \frac{4}{x+1}$ ĐK: $x \neq -1$ Đặt $x+1 = t; y+1 = z$	0,5đ
	Nên hệ đã cho có dạng: $\begin{cases} tz = 4 & (1) \\ \frac{1}{t^2-1} + \frac{t^2}{16-t^2} = \frac{2}{3} & (2) \end{cases}$	
	$(2) \Rightarrow t^4 - 8t^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow t = \pm 2 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = -3$	0,25đ
	Với $x = x_1 = 1 \Rightarrow y = 1$; Với $x = x_2 = -3 \Rightarrow y = -3$ Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(1; 1); (-3; -3)$	0,25đ
b)	Đặt $x^2 = t (t \geq 0)$ Phương trình đã cho có dạng $t^2 - 2(2m+1)t + 5m - 1 = 0 (*)$ $\Delta' = (2m+1)^2 - 5m + 1 = 4m^2 - m + 1 = \left(2m - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16} > 0 \forall m$ Gọi $t_1; t_2$ là nghiệm của phương trình (*) Theo hệ thức Vi-et ta có: $\begin{cases} t_1 + t_2 = 2(2m+1) & (**) \\ t_1 \cdot t_2 = 5m - 1 \end{cases}$ Phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt $t_1; t_2$ dương $\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 + t_2 = 2(2m+1) > 0 \\ t_1 \cdot t_2 = 5m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{1}{5}$	0,25đ
	Với mỗi giá trị của t dương ta có hai giá trị của x là hai số đối nhau. Ta có: $x_1 = -x_4 (x_4 > 0); x_2 = -x_3 (x_3 > 0); x_3 < x_4$. Để $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Không mất tính tổng quát $x_1^2 = x_4^2 = t_1$ $x_2^2 = x_3^2 = t_2$ $x_4 - x_3 = x_3 - x_2 = x_2 - x_1 \Rightarrow \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} = 2\sqrt{t_2} \Leftrightarrow t_1 = 9t_2$	

	Thay vào (***) ta được: $\begin{cases} 10t_2 = 2(2m+1) \\ 9t_2^2 = 5m-1 \end{cases} \Rightarrow 18t_2^2 - 25t_2 + 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_2 = 1 \\ t_2 = \frac{7}{18} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 2 \\ m_2 = \frac{17}{36} \end{cases}$	0,50đ
Câu 3		
	Nếu $x = 0$ hoặc $y = 0$ hiển nhiên $\sqrt{1+xy}$ là số hữu tỉ $x \neq 0$ thì $x^3 - y^3 = 2xy \Leftrightarrow x = \frac{y^3}{x^2} + 2\frac{y}{x} \Leftrightarrow xy = \frac{y^4}{x^2} + 2\frac{y^2}{x}$	0,25đ
	$\Leftrightarrow 1+xy = \frac{y^4}{x^2} + 2\frac{y^2}{x} + 1 = \left(\frac{y^2}{x} + 1\right)^2$	0,25đ
	$\Rightarrow \sqrt{1+xy} = \left \frac{y^2}{x} + 1\right $ là số hữu tỉ	0,25đ
Câu 4		
		0,25đ
	CD là tiếp tuyến của đường tròn (O;R) (gt) $\Rightarrow \widehat{KBC} = \widehat{KCA}$ (Hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)	0,25đ
a)	$\Rightarrow \Delta KBC \sim \Delta KCA \Rightarrow \frac{KC}{KA} = \frac{KB}{KC} \Rightarrow KC^2 = KA.KB$	0,25đ
	Tương tự $KD^2 = KA.KB \Rightarrow KC^2 = KD^2 \Rightarrow KC = KD$ Hay K là trung điểm của CD	0,25đ
	Vì tứ giác ACEB nội tiếp nên $\widehat{KAC} = \widehat{CEB}$	0,25đ
b)	Tương tự $\widehat{KAD} = \widehat{DFB}$	0,25đ
	$\Rightarrow \widehat{CAD} + \widehat{CID} = \widehat{KAC} + \widehat{KAD} + \widehat{CID} = \widehat{DFB} + \widehat{CEB} + \widehat{CID} = 180^\circ$	0,25đ
	Nên tứ giác ACID nội tiếp	0,25đ
	$CD // EF \Rightarrow \widehat{ICD} = \widehat{CEB}$ Mà $\widehat{BCD} = \widehat{CEB} \Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{ICD}$	0,25đ
c)	Tương tự $\widehat{BDC} = \widehat{IDC}$ nên $\Delta ICD = \Delta BCD$ (g.c.g)	0,25đ
	Suy ra $IC=BC$; $ID=BD$	0,25đ
	Suy ra CD là đường trung trực của BI hay $BI \perp CD$	0,25đ
	Vì $MN // CD$ (gt) $\frac{KC}{BM} = \frac{KA}{BA} = \frac{KD}{BN}$	0,25đ
d)	Vì $KC = KD$ suy ra $BM=BN$ (1)	0,25đ
	$BI \perp CD$ (cmt); $MN // CD$ suy ra $BI \perp MN$ (2)	0,25đ
	Từ (1) và (2) ta có ΔMIN cân tại I	0,25đ

Câu 5		
	<p>Trước hết với các số dương x, y ta có:</p> $(x - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x + y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow \frac{1}{x + y} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$ <p>Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y$</p>	0,25đ
	<p>Vì $a + b + c = 12 \Rightarrow \frac{ab}{c + 12} = \frac{ab}{(a + c) + (b + c)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{ab}{a + c} + \frac{ab}{b + c} \right)$</p> <p>Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b$</p> <p>Tương tự ta có;</p> $\frac{bc}{a + 12} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{bc}{a + b} + \frac{bc}{a + c} \right); \text{ Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } b = c$ $\frac{ca}{b + 12} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{ca}{a + b} + \frac{ca}{b + c} \right); \text{ Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } a = c$	0,50đ
	$\Rightarrow \frac{ab}{c + 12} + \frac{bc}{a + 12} + \frac{ca}{b + 12} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{ab + bc}{a + c} + \frac{ab + ac}{b + c} + \frac{ac + bc}{a + b} \right)$ $= \frac{1}{4} (a + b + c) = \frac{1}{4} \cdot 12 = 3 \text{ Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } a = b = c = 4$ <p>Vậy $\frac{ab}{c + 12} + \frac{bc}{a + 12} + \frac{ca}{b + 12} \leq 3$ là điều phải chứng minh</p>	0,25đ

- Lưu ý:**
- Các cách làm tương đương cho điểm tương đương
 - Bài hình không có hình vẽ hoặc hình vẽ sai không cho điểm bài hình
 - Điểm toàn bài không làm tròn.