

**ĐỀ THI TUYỂN SINH
VÀO TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN NĂM 2013**
Môn thi: Toán

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Dùng cho mọi thí sinh thi vào trường THPT chuyên ĐHSPT)

Thời gian làm bài: 120 phút

Câu 1 (2,5 điểm)

1. Cho biểu thức:

$$Q = \frac{\left(\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^3 + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{3a^2 + 3b\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab} - a}{a\sqrt{a} - b\sqrt{a}}$$

Với $a > 0, b > 0, a \neq b$. Chứng minh giá trị của biểu thức Q không phụ thuộc vào a và b.

2. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a+b+c=0$. Chứng minh đẳng thức

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4).$$

Câu 2 (2 điểm) Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = -mx + \frac{1}{2m^2}$ (tham số $m \neq 0$)

1. Chứng minh với mỗi $m \neq 0$, đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt

2. Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là các giao điểm của (d) và (P). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = y_1^2 + y_2^2$$

Câu 3 (1,5 điểm) Giả sử a, b, c là các số thực $a \neq b$ sao cho hai phương trình $x^2 + ax + 1 = 0$, $x^2 + bx + c = 0$ có nghiệm chung và hai phương trình $x^2 + x + a = 0$, $x^2 + cx + b = 0$ có nghiệm chung. Tính $a+b+c$.

Câu 2 (3 điểm) Cho tam giác ABC không cân có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AA₁, BB₁, CC₁ của tam giác ABC cắt nhau tại H, các đường thẳng A₁C₁ và AC cắt nhau tại điểm D. Gọi X là giao điểm thứ hai của đường thẳng BD và đường tròn (O).

1. Chứng minh $DX \cdot BD = DC_1 \cdot DA_1$.

2. Gọi M là trung điểm của cạnh AC, chứng minh $DH \perp BM$.

Câu 5 (1 điểm) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn

$$\begin{cases} \sqrt{x+2011} + \sqrt{y+2012} + \sqrt{z+2013} = \sqrt{y+2011} + \sqrt{z+2012} + \sqrt{x+2013} \\ \sqrt{y+2011} + \sqrt{z+2012} + \sqrt{x+2013} = \sqrt{z+2011} + \sqrt{x+2012} + \sqrt{y+2013} \end{cases}$$

Chứng minh $x = y = z$

-----Hết-----

Ghi chú: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

ĐÁP ÁN

Câu 1:

a)

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{\left(\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^3 + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{3a^2 + 3b\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab} - a}{a\sqrt{a} - b\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^3 + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{3a^2 + 3b\sqrt{ab}} - \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{\sqrt{a}(a-b)} \\
 &= \frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b} - 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a} + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{3a^2 + 3b\sqrt{ab}} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{3a\sqrt{a} - 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a}}{3a^2 + 3b\sqrt{ab}} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \\
 &= \frac{3\sqrt{a}(a - \sqrt{ab} + b)}{3\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = 0
 \end{aligned}$$

b)

Ta có $a^4 + b^4 + c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$ (*)

Từ $a+b+c=0$ ta có $ab+bc+ca = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} \Leftrightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a+b+c) = \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)^2$

$$\Leftrightarrow 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{2}$$

Thay vào (*) ta có điều phải chứng minh.

Câu 2

1. Ta có tọa độ giao điểm (d) và (P) là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} y=x^2 \\ y=-mx+\frac{1}{2m^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^2 \\ x^2+mx-\frac{1}{2m^2}=0;(*) \end{cases}$

Xét phương trình (*) có $\Delta = m^2 + \frac{2}{m^2} \geq 2\sqrt{2} > 0$

\Rightarrow Phương trình (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt với $\forall m \neq 0$

Vậy (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt

2. Ta có $M = y_1^2 + y_2^2 = x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2]^2 - 2x_1^2x_2^2$

Áp dụng định lý Viet: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1x_2 = \frac{-1}{2m^2} \end{cases}$ thay vào M ta có $M = \left(m^2 + \frac{1}{m^2}\right)^2 - \frac{1}{2m^4} = m^4 + \frac{1}{2m^4} + 2 \geq \sqrt{2} + 2$

$\text{Min}(M) = 2 + \sqrt{2}$ khi $m = \pm \sqrt[8]{\frac{1}{2}}$

Câu 3: $x^2 + ax + 1 = 0(1); x^2 + bx + c = 0(2) \quad x^2 + x + a = 0(3); x^2 + cx + b = 0(4)$

Gọi x_1 là nghiệm chung của phương trình (1) và (2)

Từ (1),(2) $\Rightarrow x_1(a-b) = c-1$. Vì $a \neq b \Rightarrow x_1 = \frac{c-1}{a-b}$ (5)

Chứng minh tương tự:

Nếu $c=1 \Rightarrow a=b$ (vô lý) $\Rightarrow c \neq 1$

Ta có: $x_2 = \frac{a-b}{c-1}$ (6)

Từ (5), (6) $\Rightarrow x_1x_2 = 1$ Nên x_2 là nghiệm của phương trình (1)

Vậy x_2 là nghiệm chung của (1) và (3) $\Rightarrow x_2(a-1) + 1 - a = 0 \Leftrightarrow (a-1)(x_2-1) = 0$

Nếu $a=1$ thì (3) vô nghiệm $\Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = x_2 = 1 \Rightarrow a = -2$ và $b+c+1=0 \Rightarrow a+b+c = -3$

Câu 4

a) Ta có tứ giác AC_1A_1C , $ABXC$ là các tứ giác nội tiếp

$$\Delta DCX \sim \Delta DBA (g.g) \Rightarrow \frac{DC}{DB} = \frac{DX}{DA} \Rightarrow BD \cdot DX = DC \cdot AD$$

$$\Delta DCA_1 \sim \Delta DC_1A (g.g) \Rightarrow \frac{DA_1}{DA} = \frac{DC}{DC_1} \Rightarrow DC \cdot AD = DA_1 \cdot DC_1$$

$$\Rightarrow DA_1 \cdot DC_1 = DX \cdot DB$$

d) Ta thấy : theo a) $DA_1 \cdot DC_1 = DX \cdot DB$

suy ra BC_1HA_1, BC_1A_1X là các tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow BC_1HX$ là tứ giác nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{BXH} + \widehat{BC_1H} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BXH} = 90^\circ \Rightarrow HX \perp BX$$

Kẻ đường kính BL.

Ta có : $\widehat{BAL} = 90^\circ$ (chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow BA \perp AL$ mà $CH \perp BA \Rightarrow CH \parallel AL$

$\widehat{BCL} = 90^\circ$ (chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow BC \perp CL$ mà $AH \perp BC \Rightarrow AH \parallel CL$

$\Rightarrow AHCL$ là hình bình hành.

Vì M là trung điểm AC $\Rightarrow M$ là trung điểm LH

mà $\widehat{BXL} = 90^\circ$ (chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow BX \perp XL$ mà $HX \perp BX \Rightarrow L, H, X$ thẳng hàng

hay M, H, X thẳng hàng. Nên H là trực tâm tam giác BDM nên $DH \perp BM$

Câu 5:

$$\begin{cases} \sqrt{x+2011} + \sqrt{y+2012} + \sqrt{z+2013} = \sqrt{y+2011} + \sqrt{z+2012} + \sqrt{x+2013} \\ \sqrt{y+2011} + \sqrt{z+2012} + \sqrt{x+2013} = \sqrt{z+2011} + \sqrt{x+2012} + \sqrt{y+2013} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y+2012} - \sqrt{y+2011} + \sqrt{z+2013} - \sqrt{z+2012} = \sqrt{x+2013} - \sqrt{x+2011} \\ \sqrt{z+2012} - \sqrt{z+2011} + \sqrt{x+2013} - \sqrt{x+2012} = \sqrt{y+2013} - \sqrt{y+2011} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{y+2012} + \sqrt{y+2011}} + \frac{1}{\sqrt{z+2013} - \sqrt{z+2012}} = \frac{2}{\sqrt{x+2013} + \sqrt{x+2011}} \\ \frac{1}{\sqrt{z+2012} + \sqrt{z+2011}} + \frac{1}{\sqrt{x+2013} + \sqrt{x+2012}} = \frac{2}{\sqrt{y+2013} + \sqrt{y+2011}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{y+2012} + \sqrt{y+2011}} - \frac{1}{\sqrt{x+2013} + \sqrt{x+2011}} = \frac{1}{\sqrt{x+2013} + \sqrt{x+2011}} - \frac{1}{\sqrt{z+2013} + \sqrt{z+2012}} & (1) \\ \frac{1}{\sqrt{z+2012} + \sqrt{z+2011}} - \frac{1}{\sqrt{y+2013} + \sqrt{y+2011}} = \frac{2}{\sqrt{y+2013} + \sqrt{y+2011}} - \frac{1}{\sqrt{x+2013} + \sqrt{x+2012}} & (2) \end{cases}$$

Nếu $x < y < z$ từ (1) VT dương VP âm vô lí còn nếu $x > y > z$ VP dương VT âm vô lí

Nếu $x < z < y$ từ (2) VT dương VP âm vô lí nếu $x > z > y$ VP dương VT âm vô lí

Vậy $x = y = z$

