BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM
Độc lập – Tự do - Hạnh phúc

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI TUYỂN SINH
VÀO TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN NĂM 2013
Môn thi: Toán
(Dùng cho mọi thí sinh thi vào trường THPT chuyên ĐHSP)
Thời gian làm bài: 120 phút

Câu 1 (2,5 điểm)

1. Cho biểu thức:

$$Q=\frac{\left(\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^3+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{3a^2+3b\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{ab}-a}{a\sqrt{a}-b\sqrt{a}}$$

Với $a>0, b>0, a\neq b.$ Chứng minh giá trị của biểu thức Q không phụ thuộc vào *a* và *b*.

2. Cho các số thực *a, b, c* thỏa mãn *a+b+c=0.* Chứng minh đẳng thức

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2=2\left(a^4+b^4+c^4\right).$$

Câu 2 (2 điểm) Cho parabol (P): $y=x^2$ và đường thẳng (d): $y=-mx+\frac{1}{2m^2}$ (tham số $m\neq 0$)

1. Chứng minh với mỗi $m\neq 0$, đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt

2. Gọi $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$ là các giao điểm của (d) và (P). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=y_1^2+y_2^2$

Câu 3 (1,5 điểm) Giả sử *a, b, c* là các số thực $a\neq b$ sao cho hai phương trình $x^2+ax+1=0,$ $x^2+bx+c=0$ có nghiệm chung và hai phương trình $x^2+x+a=0,$ $x^2+cx+b=0$ có nghiệm chung. Tính *a+b+c*.

Câu 2 (3 điểm) Cho tam giác ABC không cân có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 của tam giác ABC cắt nhau tại H, các đường thẳng A_1C_1 và AC cắt nhau tại điểm D. Gọi X là giao điểm thứ hai của đường thẳng BD và đường tròn (O).

1. Chứng minh $DX.BD=DC_1.DA_1$.

2. Gọi M là trung điểm của cạnh AC, chứng minh $DH\perp BM$.

Câu 5 (1 điểm) Cho các số thực *x, y, z* thỏa mãn

$$\begin{cases}\sqrt{x+2011}+\sqrt{y+2012}+\sqrt{z+2013}=\sqrt{y+2011}+\sqrt{z+2012}+\sqrt{x+2013}\\ \sqrt{y+2011}+\sqrt{z+2012}+\sqrt{x+2013}=\sqrt{z+2011}+\sqrt{x+2012}+\sqrt{y+2013}\end{cases}$$

Chứng minh $x=y=z$

------------------------Hết------------------------

Ghi chú: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:…………………………………………….Số báo danh:…………………

ĐÁP ÁN

Câu 1:

a)

$$Q=\frac{\left(\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^3+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{3a^2+3b\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{ab}-a}{a\sqrt{a}-b\sqrt{a}}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^3+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{3a^2+3b\sqrt{ab}}-\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}\left(a-b\right)}$$

$$=\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}-3a\sqrt{b}+3b\sqrt{a}+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{3a^2+3b\sqrt{ab}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{3a\sqrt{a}-3a\sqrt{b}+3b\sqrt{a}}{3a^2+3b\sqrt{ab}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$=\frac{3\sqrt{a}\left(a-\sqrt{ab}+b\right)}{3\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{ab}+b\right)}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=0$$

b)

Ta có $a^4+b^4+c^4=(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)(*)$

Từ $a+b+c=0$ ta có $ab+bc+ca=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\Leftrightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)=\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2}$

Thay vào (*) ta có điều phải chứng minh.

Câu 2

1. Ta có tọa độ giao điểm (d) và (P) là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} y=x^2\\ y=-mx+\frac{1}{2m^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=x^2\\ x^2+mx-\frac{1}{2m^2}=0;(*)\end{cases}$

Xét phương trình (*) có $\Delta=m^2+\frac{2}{m^2}\geqslant 2\sqrt{2}>0$

$\Longrightarrow$ Phương trình (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt với $\forall m\neq 0$

Vậy (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt

2. Ta có $M=y_1^2+y_2^2=x_1^4+x_2^4=\left(x_1^2+x_2^2\right)^2-2x_1^2x_2^2=\left[\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right]^2-2x_1^2x_2^2$

Áp dụng định lý Viet: $\begin{cases} x_1+x_2=-m\\ x_1x_2=\frac{-1}{2m^2}\end{cases}$ thay vào M ta có $M=\left(m^2+\frac{1}{m^2}\right)^2-\frac{1}{2m^4}=m^4+\frac{1}{2m^4}+2\geqslant\sqrt{2}+2$

Min(M)= $2+\sqrt{2}$ khi $m=\pm\sqrt[8]{\frac{1}{2}}$

Câu 3: $x^2+ax+1=0(1);\ x^2+bx+c=0(2)$ $x^2+x+a=0(3);\ x^2+cx+b=0(4)$

Gọi x_1 là nghiệm chung của phương trình (1) và (2)

Từ (1),(2) $\Rightarrow x_1(a-b)=c-1$. Vì $a\neq b\Rightarrow x_1=\frac{c-1}{a-b}(5)$

Chứng minh tương tự:

Nếu $c=1\Rightarrow a=b$ (vô lý) $\Rightarrow c\neq 1$

Ta có : $x_2=\frac{a-b}{c-1}(6)$

Từ (5), (6) $\Rightarrow x_1x_2=1$ Nên x_2 là nghiệm của phương trình (1)

Vậy x_2 là nghiệm chung của (1) và (3) $\Rightarrow x_2(a-1)+1-a=0\Leftrightarrow(a-1)(x_2-1)=0$

Nếu a=1 thì (3) vô nghiệm $\Rightarrow x_2=1\Rightarrow x_1=x_2=1\Rightarrow a=-2$ và $b+c+1=0\Rightarrow a+b+c=-3$

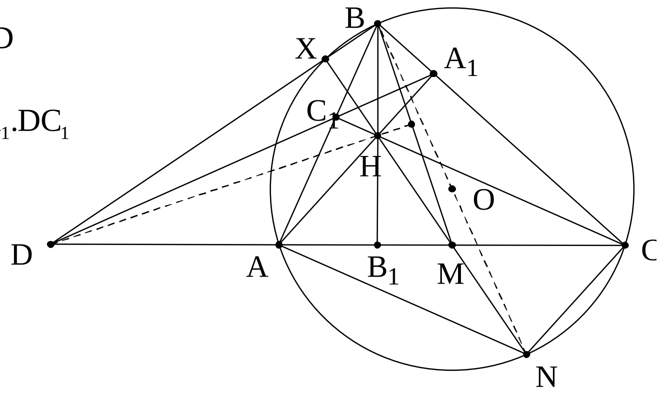
Câu 4

a)Ta có tứ giác AC_1A_1C, $ABXC$ là các tứ giác nội tiếp

$\Delta DCX \backsim \Delta DBA\,(g.g) \Rightarrow \frac{DC}{DB} = \frac{DX}{DA} \Rightarrow BD.DX = DC.AD$

$\Delta DCA_1 \backsim \Delta DC_1A\,(g.g) \Rightarrow \frac{DA_1}{DA} = \frac{DC}{DC_1} \Rightarrow DC.AD = DA_1.DC_1$

$\Rightarrow DA_1.DC_1 = DX.DB$



d) Ta thấy :theo a) $DA_1.DC_1 = DX.DB$

suy ra BC_1HA_1, BC_1A_1X là các tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow BC_1HX$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{BXH} + \widehat{BC_1H} = 180° \Rightarrow \widehat{BXH} = 90° \Rightarrow HX \perp BX$

Kẻ đường kính BL.

Ta có : $\widehat{BAL} = 90°$ (chắn nửa đường tròn)$\Rightarrow BA \perp AL$ mà $CH \perp BA \Rightarrow CH // AL$

$\widehat{BCL} = 90°$ (chắn nửa đường tròn)$\Rightarrow BC \perp CL$ mà $AH \perp BC \Rightarrow AH // CL$

$\Rightarrow$ AHCL là hình bình hành.

Vì M là trung điểm AC $\Rightarrow$ M là trung điểm LH

mà $\widehat{BXL} = 90^0$ (chắn nửa đường tròn)$\Rightarrow BX \perp XL$ mà $HX \perp BX \Rightarrow L, H, X$ thẳng hàng

hay M, H, X thẳng hàng.Nên H là trực tâm tam giác BDM nên $DH \perp BM$

Câu 5:

$$\begin{cases} \sqrt{x+2011} + \sqrt{y+2012} + \sqrt{z+2013} = \sqrt{y+2011} + \sqrt{z+2012} + \sqrt{x+2013} \\ \sqrt{y+2011} + \sqrt{z+2012} + \sqrt{x+2013} = \sqrt{z+2011} + \sqrt{x+2012} + \sqrt{y+2013} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y+2012} - \sqrt{y+2011} + \sqrt{z+2013} - \sqrt{z+2012} = \sqrt{x+2013} - \sqrt{x+2011} \\ \sqrt{z+2012} - \sqrt{z+2011} + \sqrt{x+2013} - \sqrt{x+2012} = \sqrt{y+2013} - \sqrt{y+2011} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{y+2012}+\sqrt{y+2011}} + \frac{1}{\sqrt{z+2013}-\sqrt{z+2012}} = \frac{2}{\sqrt{x+2013}+\sqrt{x+2011}} \\ \frac{1}{\sqrt{z+2012}+\sqrt{z+2011}} + \frac{1}{\sqrt{x+2013}+\sqrt{x+2012}} = \frac{2}{\sqrt{y+2013}+\sqrt{y+2011}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{y+2012}+\sqrt{y+2011}} - \frac{1}{\sqrt{x+2013}+\sqrt{x+2011}} = \frac{1}{\sqrt{x+2013}+\sqrt{x+2011}} - \frac{1}{\sqrt{z+2013}+\sqrt{z+2012}} \quad (1) \\ \frac{1}{\sqrt{z+2012}+\sqrt{z+2011}} - \frac{1}{\sqrt{y+2013}+\sqrt{y+2011}} = \frac{2}{\sqrt{y+2013}+\sqrt{y+2011}} - \frac{1}{\sqrt{x+2013}+\sqrt{x+2012}} \quad (2) \end{cases}$$

Nếu x<y<z từ(1) VT dương VP âm vô lí còn nếu x>y>z VP dương VT âm vô lí

Nếu x<z<y từ (2) VT dương VP âm vô lí nếu x>z>y VP dương VT âm vô lí

Vậy x=y=z